# SOLUCION DE ECUACION CINETICA POR EL METODO DE CINETICA INVERSA

*Gilberto SALAS*

Instituto Peruano de Energía Nuclear, Apt. 1687, Lima, Perú.

**RESUMEN**

**En este trabajo se propone un programa de cómputo (CAMU) para resolver la ecuación de cinética inversa. El código CAMU está escrito en lenguaje HPL para una computadora de mesa HP 9825A con una interfase de salida HP 9876A "Thermal Graphics Printer". El código CAMU soluciona la ecuación cinética inversa, tomando como datos de entrada la salida de las cámaras de ionización e integrando la ecuación por el método de Simpson. Con este programa se calcula la evolución de la reactividad en el tiempo para una perturbación dada.**

**ABSTRACT**

**A code (CAMU) es proposed in order to resolve, by the Simpson's method, the inverse kinetic equation. This code is writen in a HPL language for a HP 9825A micro computer with a HP 9876A Thermal Graphics Printer output interphase. The input code are the output of the ionization chambers. Reactivity as a function of time is calculated for a particular case of perturbation.**

## 1. INTRODUCCION

Uno de los más importantes parámetros para la operación de los reactores es el valor en términos de reactividad de los absorbedores de control. Este parámetro es normalmente determinado tomando una serie de medidas de la velocidad de cambio de la reactividad con veneno, obteniéndose la curva diferencial a través de mediciones del tiempo de doblaje; en el cual el período estable del reactor es obtenido del ploteo de la evolución de potencias o flujo que ocurre después de un pequeño disturbio de la posición de equilibrio. La reactividad es hallada de la ecuación "Inhour" [1] . Este reporte describe un método alternativo para de-

terminar los cambios de reactividad por medición de la salida de las cámaras de ionización acopladas a un muestreador de datos, el cual está muestrando permanentemente la señal del flujo. Un programa de computadora calcula los cambios de reactividad dependiente del tiempo, causados por variación del flujo o potencia del reactor respecto del equilibrio. La solución de la ecuación considera el término fuente. La teoría de la cinética puntual es descrita, conjuntamente con el método numérico que resuelve la ecuación.

## 2. SOLUCION DE LA ECUACION CINETICA INVERSA

El comportamiento dinámico de un reactor, considerando sólo la variable tiempo y asumiendo 15 grupos de neutrones retardados para el caso de reactores que utilizan $D_2O$ como moderador [2] puede ser representado por el modelo de cinética puntual según:

$$n'(t) = \frac{\rho(t) - \bar{\gamma}\beta n(t)}{\Lambda} + \sum_{i=1}^{i=15} \gamma_i c_i(t) - \gamma_s S(t) \qquad (1)$$

$$C_i(t) = \frac{\beta_i n(t)}{\Lambda} - \lambda_i C_i(t) \qquad (2)$$

donde:

n (t) = densidad neutrónica al tiempo t; $\rho$ (t) = exceso de reactividad al tiempo t; $\Lambda$ = tiempo entre generaciones; $\lambda i$ = constante de decaimiento del grupo 1 - ésimo; $\beta i$ = fracción de grupo i - ésimo; $\beta i$ = fracción del grupo i - ésimo del total de neutrones de fisión; Ci (t) = densidad de los neutrones del grupo i - ésimo; $\Sigma \beta i = \beta$ = fracción total de neutrones retardados; $\gamma_i$ = efectividad (en producir fisión) del i - ésimo grupo de neutrones retardados, comparado con los neutrones prontos;

$$\beta^{-1} \sum_{i=1}^{i=15} \gamma_i \beta_i = \bar{\gamma}$$ = efectividad promedio de los neutrones retardados; $\gamma_s S(t)$ = contribución efectiva del término fuente en el tiempo t.

despejando $\rho$(t) de ecuación (1) tendremos:

$$\rho(t) = \frac{\Lambda}{n(t)} n'(t) + \bar{\gamma}\beta - \frac{\Lambda}{n(t)} \Sigma \lambda_i \gamma_i C_i(t) - \frac{\Lambda}{n(t)} \gamma_s S(t) \qquad (3)$$

Aplicando transformada de Laplace a ecuación (2)

$$SC_i(S) - C_i(o) = \frac{\beta_i n(S)}{\Lambda} - \lambda_i C_i(S)$$

donde s es la variable transformada y L [f(x)] = f(s)

$$(S + \lambda_i) C_i(S) = C_i(o) + \frac{\beta_i n(S)}{\Lambda}$$

$$C_i(S) = \frac{C_i(o)}{S+\lambda_i} + \frac{\beta_i n(S)}{\Lambda(S+\lambda_i)}$$

Antitransformando y usando el teorema de convolución [3]

$$L^{-1}[f_1(S) \cdot f_2(S)] = \int_0^t f_1(u)\, f_2(t-u)\, du$$

$$f_1(S) = n(S); \quad f_1(u) = n(u)$$

$$f_2(S) = \frac{1}{S+\lambda_i} \quad ; \quad f_2(u) = e^{-\lambda_i(t-u)}$$

$$C_i(t) = C_i(o)\, e^{-\lambda_i t} + \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_0^t n(u)\, e^{-\lambda_i(t-u)}\, du$$

integrando el último término por partes tendremos:

$$C_i(t) = C_i(o)e^{-\lambda_i t} + \frac{\beta_i}{\Lambda}\left( \left[\frac{n(u)}{\lambda_i}\, e^{-\lambda_i(t-u)}\right]_o^t - \frac{1}{\lambda_i} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-u)}\, n'(u)du\right)$$

$$= C_i(o)e^{-\lambda_i t} + \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda}\, n(t) - n_o e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-u)}\, n'(u)du \quad (4)$$

Considerando la condición estable del reactor, cuando los neutrones retardados están en equilibrio, la ecuación (2) se reduce a:

$$\lambda_i C_i(o) = \frac{\beta_i n(o)}{\Lambda}$$

Por lo que despejando Ci (o) y reemplazando en (4)

$$C_i(t) = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda}\left( n(t) - \int_0^t e^{-\lambda_i(t-u)}\, n'(u)du\right)$$

Sustituyendo este resultado en ecuación (3) y rearreglando

$$\rho(t) = \Lambda \frac{n'(t)}{n(t)} - \frac{1}{n(t)} \Sigma \beta_i \int_0^t e^{-\lambda_i(t-u)} n'(u)du -$$

$$- \frac{\Lambda \gamma_s S(t)}{n'(t)} \qquad (5)$$

La solución de la ecuación inversa, es decir la velocidad de cambio de la reactividad dependiente del tiempo cmo se observa en ecuación (5) depende del cambio de la población neutrónica en presencia de una fuente de neutrones S (t). Para intervalos de tiempo adecuado en el cual la ecuación es aplicada el término fuente, puede razonablemente ser tomado como un valor constante So.

## 3. METODO NUMERICO PARA RESOLVER ECUACION DE CINETICA INVERSA

Considerando la integral

$$I_J(t) = \int_0^t e^{-\lambda_j(t-u)} n'(u)d\,u$$

donde para un incremento 2h (pequeño) del tiempo tendremos:

$$I_J(t+2h) = \int_0^{t+2h} e^{-\lambda_j(t+2h-u)} n'(u)du$$

$$= e^{-\lambda_j 2h} \int_0^{t+2h} e^{-\lambda_j(t-u)} n'(u)du$$

$$= e^{-\lambda_j 2h} \left( \int_0^t e^{-\lambda_j(t-u)} n'(u)du + \right.$$

$$\left. \int_t^{t+2h} e^{-\lambda_j(t-u)} n'(u)du \right)$$

$$= e^{-\lambda_j 2h} I_J(t) + e^{-\ j2h} \int_0^{t+2h} e^{-\lambda_j(t-u)} n'(u)du$$

Expandiendo la segunda integral por la regla de Simpson [4] tendremos finalmente:

$$I_j(t+2h) = e^{-\lambda_j 2h} I_j(t) + \frac{h}{3}\left(e^{-\lambda_j 2h} n'(t) + 4e^{-\lambda_j h} n'(t+h) + n'(t+2h)\right) \quad (6)$$

La ecuación (6) es resuelta por un programa de computación y constituye la ecuación básica para la integración de ecuación (4), la cual puede ser calculada. La variación de la densidad neutrónica n (t) es tomada del sistema de registro y muestreada a intervalos regulares de tiempo. Sin embargo, la solución de la ecuación (4) requiere conocer la derivada del flujo o potencia n' (t). El procedimiento siguiente es adoptado para el cálculo de dicho valor. El primer paso es suavizar los datos ajustándolos a un polinomio de segundo orden por el método de mínimos cuadrados, usando la siguiente expresión [5, 6]:

$$N_2 = \frac{1}{35}\left[-3n_0 + 12n_1 + 17n_2 + 12n_3 - 3n_4\right]$$

donde $N_2$ es el valor suavizado central de los datos igualmente espaciados $n_0$, $n_1$, $n_2$, $n_3$ y $n_4$. La pendiente $N_0$ de los datos suavizados $N_{-2}$, $N_{-1}$, $N_0$ y $N_1$ se determina por la siguiente fórmula [6].

$$N_0 = \frac{2}{3h}\left(N_1 - N_{-1}\right) - \frac{1}{12h}\left(N_2 - N_{-2}\right)$$

donde h es el intervalo de muestreo. Estas ecuaciones son usadas para preparar los datos, para la solución de la ecuación (5).

## 4. TRATAMIENTO DEL TERMINO FUENTE

Un reactor que contiene agua pesada como moderador, después del "shut - down" produce fotoneutrones por la reacción $D^2$ ( , n), reacción que tiene un umbral de 2.33 Mev. El decaimiento gamma de los productos de fisión induce la producción de neutrones, los cuales han sido estudiados experimentalmente [2] pudiendo ser representados por nueve grupos de neutrones retardados con una fracción y vida media características en adición a los seis grupos de neutrones retardados generados directamente por productos de fisión La tabla 1 resume estos datos para un tipo de reactor determinado [7].

El término fuente puede ser estimado por una aproximación crítico a baja potencia. Cuando el reactor está en equilibrio la ecuación (5) puede escribirse:

$$\rho(o) = -\frac{\Lambda \gamma_s S_o}{n(o)}$$

donde $\Lambda \gamma_s S_o$ representa el término fuente y tiene las mismas unidades que $n(t)$ Por

ejemplo, suponiendo que la correspondiente cámara de ionización lee un flujo de 0.345 y el reactor se encuentra subcrítico 0.04 o/o, tendremos:

$$-0.0004 = -\frac{\Lambda \ \gamma_s S_0}{0.345}$$

donde $\Lambda \ \gamma_s S_0 = 0.000138$. Este resultado es usado en ecuación (5) para determinar el cambio de reactividad, por la variación del flujo.

**TABLA 1**

**Grupo de Neutrones Retardados**

En esta tabla la fracción de neutrones retardados $\beta i$ son tomados como porcentaje del total producido.

| GRUPO | | Vida Media | $\lambda i, s^{-1}$ | $\beta i$ o/o |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 55.72 | 0.01244 | 0.02105 |
| Neutrones | 2 | 22.72 | 0.0305 | 0.140 |
| | 3 | 6.22 | 0.1114 | 0.1255 |
| Retardados | 4 | 2.30 | 0.3012 | 0.2525 |
| | 5 | 0.61 | 1.135 | 0.0737 |
| | 6 | 0.23 | 3.012 | 0.0267 |
| | 7 | 2.49 | 0.278 | 0.01023 |
| | 8 | 39.65 | 0.0172 | 0.005494 |
| | 9 | 126.45 | 0.00552 | 0.008819 |
| | 10 | 12.72 Min | 0.000908 | 0.001672 |
| Fotoneutro- | 11 | 27.33 Min | 0.000417 | 0.0007008 |
| nes | 12 | 1.716 h | 0.000112 | 0.00635 |
| | 13 | 4:38 h | 0.0000439 | 0.0000104 |
| | 14 | 36.1 h | 0.000000627 | 0.0000244 |

En el caso particular de pequeños cambios de reactividad, es decir, movimientos cortos de los absorbedores de control, con propósitos de calibración, la fuente puede ser tratada por un método alternativo basado en el principio de que después de realizado el movimiento del absorbedor, el programa cinético considera un valor constante en el valor de reactividad. Muestreos digitales del flujo o potencia son tomados a partir del estado de equilibrio, durante y después del movimiento del absorbedor. Los puntos calculados son ajustados por mínimos cuadrados y la aproximación es hecha para corregir el término en el proceso iterativo, comenzado con el nuevo valor calculado, hasta lograr el ajuste deseado.

## 5. CAMU .— PROGRAMA QUE RESUELVE LA ECUACION DE CINETICA INVERSA

El programa de cómputo en la versión HPL, resuelve la ecuación (5), dando los resul-

tados de los cambios de reactividad por alguna variación del perfil de flujo o potencia. Los datos de entrada son listados en la tabla 2 y los de salida en la tabla 3. El tiempo en segundos es listado a la salida del programa al lado de la correspondiente columna de reactividad. Igualmente, los valores de potencia (P), datos suavizados de potencia (Q) y la derivada de los datos suavizados (QS), así como la pendiente de ajuste. La comparación entre P y Q da una idea del ajuste por suavizados.

## CONCLUSION

El programa aquí presentado es esencialmente simple, fácil de almacenar y usar en una computadora de mesa. La solución de la ecuación de cinética inversa por este método es útil para la calibración de barras de control, en reactores que usan agua pesada como moderador, pues a raíz de la producción de fotoneutrones, esta fuente intrínseca de neutrones, constituye una interferencia en la determinación del período estable del reactor, y por ende de la calibración por el método del período. Si se asocia a la cámara de ionización correspondiente (medición de potencia) un sistema de adquisición de datos compatible con la computadora, se tendrá una calibración automática on - line.

Se agradece la valiosa colaboración prestada por el Ing. Arturo Ramón Vicente, del Grupo de Apoyo Instrumental del Reactor RP – O, en la elaboración del programa de cómputo.

### TABLA 1

**Lista de Datos de Entrada**

El tiempo entre generaciones es de 300 seg.; el tiempo de muestreo es de 0.91 seg; el número de datos es 43 y el número de puntos de ajuste es 11.

| | I | λ(I) |
|---|---|---|
| 1 | $2.185 \times 10^{-4}$ | $1.244 \times 10^{-3}$ |
| 2 | $1.400 \times 10^{-3}$ | $3.050 \times 10^{-2}$ |
| 3 | $1.255 \times 10^{-3}$ | $1.113 \times 10^{-1}$ |
| 4 | $2.522 \times 10^{-3}$ | $3.012 \times 10^{-1}$ |
| 5 | $7.370 \times 10^{-3}$ | 1.135 |
| 6 | $2.670 \times 10^{-4}$ | 3.012 |
| 7 | $1.230 \times 10^{-4}$ | $2.780 \times 10^{-1}$ |
| 8 | $1.594 \times 10^{-5}$ | $1.742 \times 10^{-2}$ |
| 9 | $8.819 \times 10^{-5}$ | $5.520 \times 10^{-3}$ |
| 10 | $1.672 \times 10^{-5}$ | $9.080 \times 10^{-4}$ |
| 11 | $7.008 \times 10^{-6}$ | $4.170 \times 10^{-4}$ |
| 12 | $1.635 \times 10^{-5}$ | $1.120 \times 10^{-4}$ |
| 13 | $1.040 \times 10^{-7}$ | $4.390 \times 10^{-5}$ |
| 14 | $2.041 \times 10^{-7}$ | $5.530 \times 10^{-6}$ |
| 15 | $2.440 \times 10^{-7}$ | $6.270 \times 10^{-7}$ |

## DATOS DE POTENCIA

| N | P[N] | N | P[N] |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.3450 | 23 | 0.6000 |
| 2 | 0.3450 | 24 | 0.6150 |
| 3 | 0.3450 | 25 | 0.6290 |
| 4 | 0.3450 | 26 | 0.6420 |
| 5 | 0.3450 | 27 | 0.6550 |
| 6 | 0.3450 | 28 | 0.7680 |
| 7 | 0.3450 | 29 | 0.6800 |
| 8 | 0.3450 | 30 | 0.6920 |
| 9 | 0.3450 | 31 | 0.7850 |
| 10 | 0.3450 | 32 | 0.7160 |
| 11 | 0.3600 | 33 | 0.7290 |
| 12 | 0.3720 | 34 | 0.7420 |
| 13 | 0.3870 | 35 | 0.7540 |
| 14 | 0.4050 | 36 | 0.7660 |
| 15 | 0.4290 | 37 | 0.7780 |
| 16 | 0.4520 | 38 | 0.7920 |
| 17 | 0.4790 | 39 | 0.8040 |
| 18 | 0.5150 | 40 | 0.8160 |
| 19 | 0.5370 | 41 | 0.8280 |
| 20 | 0.5520 | 42 | 0.8400 |
| 21 | 0.5670 | 43 | 0.8520 |
| 22 | 0.5820 | | |

## TABLA 3

**Lista de datos de salida. El número de últimos puntos considerados es 11 y la pendiente de la recta ajustada es 0.**

| t(Seg.) | Reactividad (°/o) | POT | Q | |
|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 0.126 | 0.345 | 0.34500 | |
| 1.818 | 0.126 | 0.345 | 0.34500 | |
| 3.636 | 0.126 | 0.345 | 0.34500 | |
| 5.454 | 0.126 | 0.345 | 0.34500 | $1.1784 \times 10^{-4}$ |
| 7.272 | 0.128 | 0.345 | 0.34371 | $8.8795 \times 10^{-4}$ |
| 9.090 | 0.100 | 0.360 | 0.35794 | 0.014160 |
| 10.908 | 0.058 | 0.387 | 0.38674 | 0.018034 |
| 12.726 | 0.013 | 0.429 | 0.42797 | 0.025164 |
| 14.544 | 0.029 | 0.479 | 0.48140 | 0.034323 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16.362 | 0.054 | 0.537 | 0.53700 | 0.021636 |
| 18.180 | 0.052 | 0.567 | 0.56674 | 0.016415 |
| 19.998 | 0.055 | 0.600 | 0.59931 | 0.018063 |
| 21.816 | 0.055 | 0.629 | 0.62891 | 0.014626 |
| 23.634 | 0.054 | 0.655 | 0.65509 | 0.014197 |
| 25.452 | 0.053 | 0.680 | 0.68000 | 0.013458 |
| 27.270 | 0.053 | 0.705 | 0.70440 | 0.013243 |
| 29.088 | 0.053 | 0.729 | 0.72891 | 0.014011 |
| 30.906 | 0.053 | 0.754 | 0.75409 | 0.013055 |
| 32.724 | 0.054 | 0.778 | 0.77851 | 0.014225 |
| 34.542 | 0.054 | 0.804 | 0.80417 | 0.013442 |

## REFERENCIAS


[1] Glasstone and Edlund, The elements of nuclear reactor theory, Macmillon and Co p. 301

[2] G.R. Keepin, Physics of Nuclear Kinetics - Chapter 9, Addison Wesley, 1965

[3] G. Doestsch, Guide to the applications of the laplace an-Z- transforms, p. 29 - No stran Reinhold Company, 1971

[4] B. Carnahon, H.A. Luther J.O. Wilkes

[4] B. Carnahon, A.H. Luther, Applied Numerical Methods, J.O. Wilkes,John Wiley and Sons, inc., 1969, p. 73

[5] D. Mc crack en, Dorn Willon Métodos numéricos y programación FORTRAN, LUMUSA - Wiley, 1966, p. 282

[6] Milne W.A. Numerical calculus, Princeton University Press, 1943, art. 73

[7] Wade, B.O. Summary of the delayed photo neutron data. Internal note, 1963

[8] Necdhom J. Pirk 2 a computer program to solve the inverse reactor kinetc equations, ARE, Harwell M - 2991, February, 1979

Solución de ecuación cinética por el método de cinética inversa por Gilberto Salas se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.